

**Phòng GD & ĐT Thị Xã Buôn Hồ  
Trường THCS Nguyễn Du  
\*\*\*\*\***

## **CHUYÊN ĐỀ CẤP CỤM**

**Tên Chuyên Đề:**

**DÙNG CÔNG THỨC “TỔNG QUÁT” ĐỂ TÌM CÁC  
CÔNG THỨC KHÁC TRONG HÌNH HỌC  
KHÔNG GIAN**

Người viết : **Nguyễn Bá Dũng**

Năm Học 2020-2021

### **A/ Đặt vấn đề:**

Có thể nói rằng khái quát hóa, đào sâu suy nghĩ và tổng hợp vấn đề, liên hệ kiến thức cũ trong quá trình học toán là một điều kiện cần thiết để đạt được những kết quả tốt trong việc học toán.

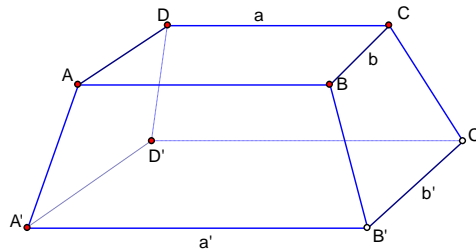
Vì vậy, mỗi khi học xong một bài nào, một chương nào, bạn hãy cố gắng hệ thống nó lại để tìm mối quan hệ giữa các vấn đề với nhau. Nêu lên những điểm chủ yếu nhất, cơ bản nhất và bao quát nhất.

Ở cấp học THCS, học sinh học môn hình học không gian còn hờ hợt, không có phương pháp nhớ các công thức tính toán của các hình không gian. Chính vì thế tôi đã suy nghĩ, nghiên cứu, tìm cách khái quát hóa các công thức tính toán của các hình không gian trong chương trình bộ môn toán cấp THCS với đề tài nghiên cứu: Dùng công thức “tổng quát” để tìm các công thức khác trong hình học không gian.

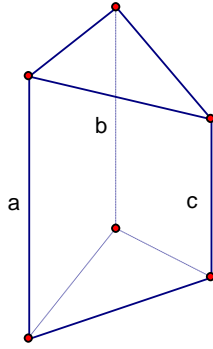
### **B/ Nội dung:**

#### **I/ Đi tìm công thức “tổng quát”**

Dựa vào cách tính của ông cha xưa đó là : để tính thể tích một khối đất hay khối đá, người ta thường xếp khối đất hay đá đó thành một đống giống như hình chóp cụt có các đáy là hình chữ nhật, các mặt bên là các hình thang cân (như hình vẽ) và đã tìm ra một công thức tính thể tích khối đất hay khối đá. Công thức đó có thể được gọi là công thức “tổng quát”, bởi vì nó có thể tính thể tích và diện tích của các hình không gian quen thuộc trong chương trình toán THCS.



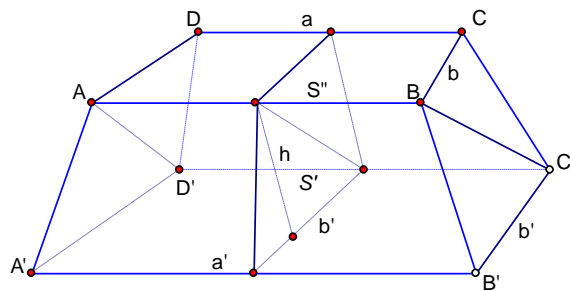
Trước hết, tôi căn cứ vào một công thức tính thể tích của hình lăng trụ lệch (là hình lăng trụ có hai mặt đáy không song song với nhau) có đáy tam giác là



$$V = S \left( \frac{a+b+c}{3} \right) \quad (1)$$

Trong đó  $S$  là thiết diện thẳng và  $a, b, c$  là 3 cạnh của hình lăng trụ lặc.

Ta chia khối đất hay khối đá phải tính thể tích thành 2 hình lăng trụ lặc là hình :  $AA'D'.BB'C'$  và hình  $ADD'.BCC'$ .



Áp dụng công thức (1) cho hình  $AA'D'.BB'C'$ , ta được :

$$V' = S' \cdot \left( \frac{a+a'+a'}{3} \right)$$

Do diện tích thiết diện thẳng  $S' = \frac{1}{2} b' h$  nên

$$V' = \frac{1}{6} b' h (a + 2a')$$

Đối với hình  $ADD'.BCC'$ , ta có :

$$V'' = S'' \cdot \left( \frac{a+a+a'}{3} \right)$$

Do diện tích thiết diện thẳng  $S'' = \frac{1}{2} b h$  nên

$$V'' = \frac{1}{6} b h (2a + a')$$

Vậy thể tích khối đất hay đá đó là :

$$V = V' + V'' = \frac{1}{6}h(2ab + ab' + a'b + 2a'b')$$

$$V = \frac{1}{6}h[ab + (a+a')(b+b') + a'b']$$

$$V = \frac{1}{6}h\left[ab + 4\left(\frac{a+a'}{2}\right)\left(\frac{b+b'}{2}\right) + a'b'\right]$$

Ta có nhận xét sau :

$ab$  là diện tích đáy trên của khối đất hay đá

$a'b'$  là diện tích đáy dưới của khối đất hay đá

$\left(\frac{a+a'}{2}\right)\left(\frac{b+b'}{2}\right)$  là diện tích của thiết diện giữa có các cạnh là các đường

trung bình của các mặt hình thang.

Vì vậy, ta gọi  $S_1, S_2, S_3$  lần lượt là diện tích đáy trên, thiết diện giữa, đáy dưới và  $h$  là chiều cao của khối đất hoặc đá thì thể tích của nó là :

$$V = \frac{1}{6}h(S_1 + 4S_2 + S_3) \quad (2)$$

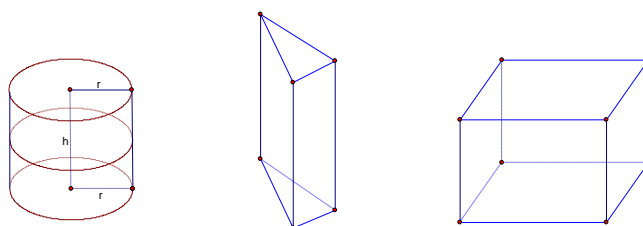
Công thức (2) được xem là công thức “tổng quát”, bởi vì nó không những biểu thị thể tích của khối đất hay đá mà còn dùng để tính thể tích và diện tích của các hình không gian khác.

Bây giờ ta đi kiểm nghiệm lại xem. Ta hãy biến đổi công thức (2) thành những công thức tính thể tích và diện tích quen thuộc đã được học trong chương trình toán THCS.

## II/ Công thức tính thể tích

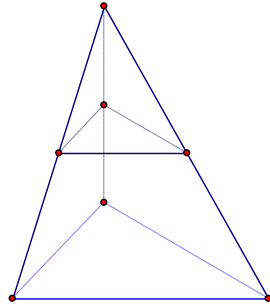
1/ Đối với hình lăng trụ, hình hộp, hình trụ: Vì diện tích đáy trên, đáy dưới và thiết diện giữa đều bằng nhau nên ta có

$$V = \frac{1}{6}h(S + 4S + S) = Sh$$



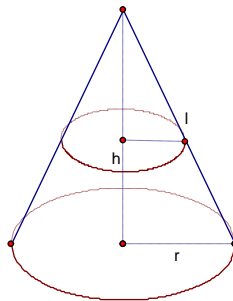
2/ Đối với hình chóp: Vì tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng nên diện tích thiết diện giữa bằng  $\frac{1}{4}$  đáy dưới nên ta có

$$V = \frac{1}{6}h \left( 0 + 4\frac{S}{4} + S \right) = \frac{1}{3}Sh$$



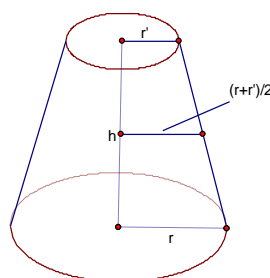
3/ Đối với hình nón: Vì bán kính của thiết diện giữa bằng một nửa bán kính đáy dưới  $r$ , nên ta có

$$V = \frac{1}{6}h \left( 0 + 4\pi \left( \frac{r}{2} \right)^2 + \pi r^2 \right) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



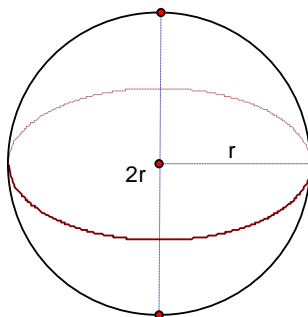
4/ Đối với hình nón cụt: Vì bán kính của thiết diện giữa bằng trung bình cộng của hai bán kính đáy trên và đáy dưới, nên ta có

$$V = \frac{1}{6}h \left( \pi r^2 + 4\pi \left( \frac{r+r'}{2} \right)^2 + \pi r'^2 \right) = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + rr' + r'^2)$$



5/ Đối với hình cầu: Vì chiều cao bằng  $2r$ , nên ta có

$$V = \frac{1}{6} 2r(0 + 4\pi r^2 + 0) = \frac{4}{3} \pi r^3$$



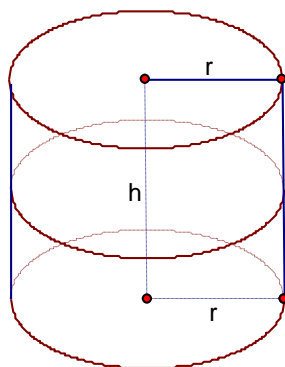
### III/ Công thức tính diện tích

Nghiên cứu thêm, ta nhận thấy công thức “tổng quát” cũng biểu diễn thành các công thức tính diện tích xung quanh của một số hình không gian trong chương trình lớp 9 (mà ta gọi là hình tròn xoay).

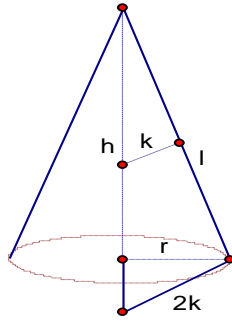
Trong công thức (2) ta coi  $V$  là diện tích xung quanh  $S_{xq}$ ,  $h$  là chiều cao, và  $S_1, S_2, S_3$  lần lượt là độ dài các đường tròn có bán kính vuông góc với đường sinh và kẻ từ đầu mút hoặc điểm chính giữa đường sinh đến trục của hình tròn xoay.

1/ Đối với hình trụ: Các bán kính của 3 vòng đều bằng bán kính đáy

$$\text{nên } S_{xq} = \frac{1}{6} h(2\pi r + 4.2\pi r + 2\pi r) = 2\pi r h$$



2/ Đối với hình nón: Nếu bán kính đường tròn giữa bằng  $k$  thì bán kính đường tròn đáy là  $2k$ .



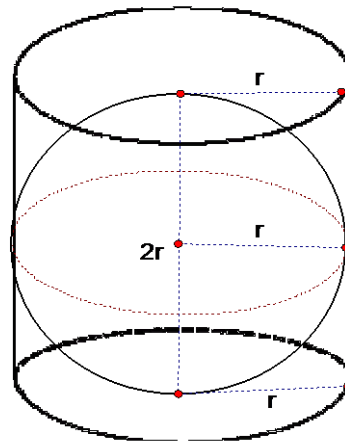
Ta có  $S_{xq} = \frac{1}{6}h(0 + 4.2\pi k + 4\pi k) = 2\pi kh$

Vì từ hai tam giác vuông đồng dạng ta có  $2kh = rl$  nên

$$S_{xq} = 2\pi kh = \pi rl$$

3/ Đối với hình cầu: do chiều cao bằng  $2r$  và bán kính của 3 vòng đều bằng  $r$  nên diện tích mặt cầu là

$$S = \frac{1}{6}2r(2\pi r + 4.2\pi r + 2\pi r) = 4\pi r^2$$



#### IV/ Đối với hình học phẳng.

Từ công thức “tổng quát” giáo viên cũng như học sinh dễ dàng biến đổi thành các công thức hình học phẳng khác. Nó giúp ta đào sâu, để nhớ các công thức đó nhiều hơn.

Bây giờ, ta nghiên cứu thêm công thức “tổng quát” có biểu diễn thành các công thức tính diện tích tam giác, tứ giác, hình tròn, hình quạt trong hình học lớp 8. lớp 9 không?

Trong công thức (2) ta coi  $V$  là diện tích  $S$ ,  $h$  là chiều cao, và  $S_1, S_2, S_3$  lần lượt là cạnh trên, cạnh giữa và cạnh đáy dưới của hình. Lúc này, ta có:

1/ Đối với tam giác:

$$S = \frac{1}{6}h \left( 0 + 4\frac{a}{2} + a \right) = \frac{1}{2}ah$$

2/ Đối với hình thang:

$$S = \frac{1}{6}h \left( a + 4\frac{a+b}{2} + b \right) = \frac{1}{2}(a+b)h$$

3/ Đối với hình bình hành, hình thoi: vì cạnh trên, cạnh dưới và cạnh giữa đều bằng nhau nên ta có

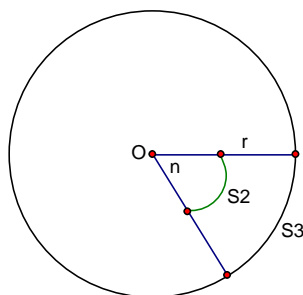
$$S = \frac{1}{6}h(a + 4a + a) = ah$$

4/ Đối với hình chữ nhật, hình vuông: vì cạnh cũng là đường cao nên

$$S = \frac{1}{6}b(a + 4a + a) = ab$$

5/ Đối với hình quạt tròn: Nếu coi hình quạt là một tam giác cong có góc ở đỉnh là  $n$  và đường cao là  $r$  thì cạnh giữa  $S_2 = 2\pi \left( \frac{r}{2} \right) \frac{n}{360}$  và đáy dưới

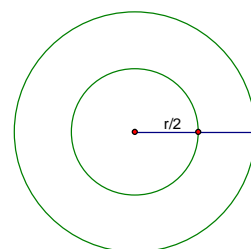
$$S_3 = 2\pi r \frac{n}{360}.$$



Ta có 
$$S = \frac{1}{6}r \left( 0 + 4.2\pi \left( \frac{r}{2} \right) \frac{n}{360} + 2\pi r \frac{n}{360} \right) = \pi r^2 \frac{n}{360}$$

6/ Đối với hình tròn: Xem hình tròn là một hình quạt đặc biệt khi  $n = 360^\circ$ , tức là 2 cạnh của hình quạt trùng nhau thì :

$$S = \frac{1}{6}r \left( 0 + 4.2\pi \left( \frac{r}{2} \right) + 2\pi r \right) = \pi r^2$$





**V. Kết luận:**

Rõ ràng công thức “tổng quát” không tự nhiên mà có, nó được tìm ra từ một trường hợp cụ thể (tính thể tích của khối đất hoặc khối cát) và được kiểm nghiệm qua tất cả các trường hợp khác nhau (diện tích và thể tích của các hình).

Vì vậy, việc tìm ra và kiểm nghiệm công thức “tổng quát” là rất bổ ích trong việc học và nghiên cứu hình học không gian. Học sinh chỉ cần nhớ công thức “tổng quát” là có thể biến đổi công thức đó thành công thức hình không gian đã học một tiện lợi và dễ dàng.

*Tx Buôn Hồ, tháng 01 năm 2021.*

Người viết : **GV. Nguyễn Bá Dũng**

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- 1/ SGK lớp 8 – tập 2 – Nhà xuất bản Giáo Dục
- 2/ SGV lớp 8 – tập 2 – Nhà xuất bản Giáo Dục
- 3/ SGK lớp 9 – tập 2 – Nhà xuất bản Giáo Dục
- 4/ SGV lớp 9 – tập 2 – Nhà xuất bản Giáo Dục
- 5/ Các bài giảng hình học không gian lớp 9 – school@net
- 6/ Sách “Hình học không gian” – Tác giả : Phan Huy Khải
- 7/ Các mô hình hình học không gian – phần mềm Cabri 3D.